S E S   2 0 1 8
Fourteenth International Scientific Conference
SPACE, ECOLOGY, SAFETY
7 – 9 November 2018, Sofia, Bulgaria

ВЪРХУ ЕДИН МЕТОД ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ НА ПАРАМЕТРИЧЕН РЕЗОНАНС

Костадин Шейретски[1], Пламен Румен Шкевов[2], Николай Ерохин[3]

[1]Университет за национално и световно стопанство – София
[2]Институт за космически изследвания и технологии – Българска академия на науките
[3]Институт за космически изследвания – Руска академия на науките
e-mail: ksheiretsky@space.bas.bg

Ключови думи: *Асимптотични методи, теория на трептенията, приложна математика, нелинейна динамика, малък параметър*

Резюме: *В доклада е представен аналитичен подход за изследване на параметричен резонанс на дисипативна система. Методът позволява да се изведе приближено решение с подбрана от нас точност, посредством решаване на алгебрична система и на обикновени диференциални уравнения. За да се реши коректно задачата се въвежда селектиращ порядъците малък положителен параметър. Предложения метод позволява да се реши задачата по относително лесен начин в сравнение с най-често използваните асимптотични методи.*

ON A METHOD FOR PARAMETRIC RESONANCE STUDY

Kostadin Sheiretsky[1], Rumen Shkevov[2], Nikolay Erokhin[3]

[1]University of National and World Economy
[2]Space Research and Technology Institute – Bulgarian Academy of Sciences
[3]Space Research Institute – Russian Academy of Sciences
e-mail : ksheiretsky@space.bas.bg

Keywords: *Asymptotic methods, oscillation theory, applied mathematics, nonlinear dynamics, small parameter*

Abstract: *The report presents an analytical approach for a dissipative system parametric resonance study. The method allows us to draw an approximate solution with a chosen accuracy, by solving an algebraic system and ordinary differential equations. In order to solve the problem correctly, a small positive parameter is introduced. The proposed method allows us to solve the task in a relatively simple way, compared to the most commonly used asymptotic methods.*

Въведение

Параметричният резонанс е явление, за аналитичното изучаване на което се прилагат методи от нелинейната динамика. Въпреки, че уравнението, което се изучава е линейно, се налага да се използва разлагане на решението по малък параметър в асимптотичен ред. Основните техники за постигането на това са метод на Поанкаре и метод на осреднението [1]. При използване методът на Поанкаре, получаваме информация за установения процес, но не и как се достига до него [2]. При техниките свързани с метод на осреднението: метод на Ван дер Пол, метод на Крилов – Боголюбов - Митрополски и т.н., получаваме решение, което може да проследи пътя до достигане на стационарния процес, но с всяко следващо приближение се налага да се пресмятат интеграли, което често е свързано с големи математически трудности [3, 4].

Предложеният подход се характеризира с простота при намирането на решение, като се използва метод на хармоничния баланс и метод на малкия параметър [1]. Евентуалното модифициране на методът е възможно за изследване на други честоти при които се осъществява параметричен резонанс, освен разгледаната, но се налагат допълнителни математически конструкции и идеи, които в този доклад няма да излагаме. Предимство на тази аналитична техника е, че на базата на сравнително малко и несложни изчисления, може да се изследва това сложно явление.

Основен ключ към разрешаване на аналитичните трудности с изведеното по метод на хармоничния баланс основно алгебрично уравнение е въвеждането на един малък положителен параметър, който няма физическо значение, но спомага за определяне на порядъците на съответните величини. Макар, той да не може да приеме нулева стойност, след въвеждането му в уравнението, могат да се използват принципите за работа от класическия подход за използване на малък параметър, естествено се изключва съществуването на нулево приближение.

Голямо предимство на метода е, че следващите приближения се намират посредством решаването на линейни диференциални уравнения, които както знаем, имат точно аналитично решение.

Теория на метода

Разглеждаме уравнението на Матьо в случай на параметричен резонанс [5]:

(1) $$\ddot{x} + \omega^2 x + \beta \dot{x} + h\omega^2 \cos[(2\omega + \Delta)t]\, x = 0,\ |\Delta| \ll 1,\ h \ll 1,$$

с наложени начални условия:

(2) $$x(0) = L_0,\ \dot{x}(0) = 0.$$

Наличието на дисипативен член усложнява задачата и ние ще си поставим за задача да добием информация и за преходния процес, който води до установените параметрични трептения.

Търсим решението на уравнение (1) във вида:

(3) $$x = A\cos\Psi + h\gamma_1(t) + h^2\gamma_2(t) + \cdots,$$

където:

$$A = A_0 e^{\lambda t},\ A_0 = const,\ \lambda = const,$$
$$\Psi = \Omega t + \delta_0,\ \delta_0 = const,\ \Omega = \mathrm{const}.$$

Като заместим (3) в уравнението (1) и потърсим Ω от условието:

$$2\omega + \Delta - \Omega = \Omega,$$

достигаме до стойността на честотата:

(4) $$\Omega = \omega + \frac{\Delta}{2}.$$

Записваме и системата от уравнения, произтичаща от приравняването на нула на съответните коефициенти пред $\cos\left(\omega + \frac{\Delta}{2}\right)t$ и $\sin\left(\omega + \frac{\Delta}{2}\right)t$:

$$\left[\lambda^2 + \beta\lambda - \omega\Delta + \frac{\omega^2 h}{2}\right]\cos\delta_0 - 2\left(\lambda + \frac{\beta}{2}\right)\left(\omega + \frac{\Delta}{2}\right)\sin\delta_0 = 0,$$

(5) $$2\left(\lambda + \frac{\beta}{2}\right)\left(\omega + \frac{\Delta}{2}\right)\cos\delta_0 + \left[\lambda^2 + \beta\lambda - \omega\Delta - \frac{\omega^2 h}{2}\right]\sin\delta_0 = 0.$$

Лесно се съобразява, че за да съществува решение на системата (5) е необходимо да се изпълни равенството:

(6) $$(\lambda^2 + \beta\lambda - \omega\Delta)^2 - \left(\frac{\omega^2 h}{2}\right)^2 + 4\left(\lambda + \frac{\beta}{2}\right)^2\left(\omega + \frac{\Delta}{2}\right)^2 = 0.$$

Така написания израз няма еднозначно третиране. За да може да разпределим величините по порядъци се налага да въведем един малък положителен параметър μ. Макар той да няма физическо значение и не може да приема стойност нула, както е в класическите асимптотични редове, този малък параметър се оказва начин да се избегнат неправилни математически интерпретации. Формално полагаме:

(7) $$\Delta = \mu\Delta_0,\ h = \mu h_0,\ \beta = \mu\beta_0.$$

Величините индексирани с нула са с размерност на изходните величини и „тежест“ определена от малкия параметър.

Ще потърсим:

(8) $$\lambda = -\mu\beta_0 + \mu^2\lambda_1 + \cdots.$$

Изразите, който произтичат от втората и третата степен по параметъра μ имат вида:

(9) $$(\omega\Delta)^2 - \left(\frac{\omega^2 h}{2}\right)^2 + \beta^2\omega^2 = 0.$$

(10) $$\mu^2\lambda_1 = \frac{\beta\Delta}{4\omega}.$$

Уравнение (9) веднага дава условията, при които възниква параметричния резонанс и съответната прагова стойност на h.

Поради това, че формално въведените величини индексирани с нула в крайния резултат са умножение на малкия параметър, то получените окончателни изрази съдържат действителните величини определящи системата, например:

$$\lambda = -\beta + \frac{\beta\Delta}{4\omega}.$$

В първо приближение остана още едно уравнение:

(11) $$\ddot{\gamma}_1 + \omega^2\gamma_1 + \beta\dot{\gamma}_1 = -\frac{\omega^2 A}{2}\cos\delta_0\cos\left(3\omega + \frac{3\Delta}{2}\right)t - \frac{\omega^2 A}{2}\sin\delta_0\sin\left(3\omega + \frac{3\Delta}{2}\right)t.$$

Търсим решението на (11) във вида:

(12) $$\gamma_1 = CA\cos\left(3\omega + \frac{3\Delta}{2}\right)t + DA\sin\left(3\omega + \frac{3\Delta}{2}\right)t,$$

C и D са константи. Като заместим (12) в уравнението (11), за неизвестните константи се получава:

(13) $$C = \frac{\omega^2}{16}\cos\delta_0,\ D = \frac{\omega^2}{16}\cos\delta_0.$$

Намирането на следващите приближения се осъществява по аналогичен начин и ние няма да се спираме на това.

Уравнението на Матьо (1) е линейно и допуска към решението отнасящо се до параметричният резонанс, да се прибави и затихващо с времето решение. Наистина, нека потърсим общото решение във вида:

(14) $$x = x_d + x_p,$$

като наложим на x_d да удовлетворява уравнението:

(15) $$\ddot{x}_d + \omega^2 x_d + \beta\dot{x}_d = 0.$$

Както е известно, това уравнение има решение:

(16) $$x_d = l_1 e^{-\frac{\beta}{2}t}\cos(\omega t + \varphi_0) + l_2 e^{-\frac{\beta}{2}t}\sin(\omega t + \varphi_0),$$

където l_1, l_2 и φ_0 са константи.

За x_p избираме полученото преди това решение, описващо параметричния резонанс, като удовлетворява пълното уравнение на Матьо. Съгласно получените резултати:

(17) $$x_p = x_{p_1} + x_{p_2},$$

където x_{p_1} и x_{p_2} съответстват на различните знаци на Δ.

На границата на неустойчивостта амплитудата е постоянна $A = A_0$. Единственото, което може да кажем за нея е, че е различна от нула. Наистина, ако до пуснем че е нула задачата се изражда в тривиално равенство. На практика A_0 може да има произволни стойности заради наличието на члена x_d, който води до „забравяне“ на началните условия от системата.

Заключение

В кратка форма, в доклада е представен метод, който се базира на метод на хармоничния баланс и на метод на малкия параметър. В работата не сме се спирали на конкретната физика на явлението параметричен резонанс, първо защото то е добре изучено и второ, защото не бихме могли да предвидим, какви физични задачи биха имали отношение към информацията за преходните процеси до достигането на стационарния режим. Въпреки всичко, ценността на подхода е именно в лесното извеждане на тези преходни процеси в аналитичен вид, което при други методи е свързано с големи изчислителни трудности. Важна идея в работата е въвеждането на малкия положителен параметър μ. Уравнение (6), макар да съдържа достатъчно информация за изучавания процес, създава големи трудности при аналитичното му решение. Решаването на такива задачи винаги е свързано с физиката на процеса и е необходим предварителен анализ на математическата структура на уравнението. Въведения фиктивен параметър дава възможност за правилно селектиране на величините, по отношение на техния порядък. Дефинирането му е свързано с физични съображения и произволът, по който се съставят редовете (7) и (8) е само на пръв поглед. При детайлен анализ на задачата може да се установи, че подбрания от нас вид е единствено възможния.

Идеята на представената работа е да се даде различен поглед върху явлението параметричен резонанс, чрез въвеждането на физически ясна и лесна за изпълнение техника на пресмятане. Обикновено в класическите курсове по теоретична физика, например в [5], уравнението на Матьо с дисипативен член не се разглежда, именно поради изчислителните трудности. В тази работа е представен алтернативен подход, който да е разбираем за студенти и специалисти със средни математически познания.

Литература:

1. Хаяси, Т. Нелинейные колебания. Москва, Мир, 1968.
2. Poincare, H., Les methods nouvelles de la mécanique céleste, t. 1–3. Paris. 1899.
3. Моисеев, Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969.
4. Боголюбов, Н.Н., Митропольский, А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Гос. изд-во физико-математической литературы,1963.
5. Ландау, Л., Е. Лифшиц. Механика. Москва, Наука, 1973.